K O M B I N A T O R I K A

Zopakovanie učiva kombinatoriky zo 6. ročníka základnej školy:

V minulom školskom roku sme sa dozvedeli, že kombinatorika je časť matematiky, ktorá skúma otázky **existencie, vytvárania a určenia počtu** konfigurácií - **možností.** Zaoberá sa najmä úlohami výpočtu koľkými spôsobmi môžeme **vybrať** určité objekty, koľkými spôsobmi môžeme **usporiadať** určité objekty a koľkými spôsobmi môžeme **zoradiť** určité objekty.
V minulom školskom roku sme počítali príklady v ktorých záležalo na poradí prvkov:

Vzorový príklad z kombinatoriky – opakovanie:

Zadanie: Koľko všetkých trojciferných čísel je možné vytvoriť z číslic 2, 4 a 5 tak, aby sa žiadna z číslic 2, 4 a 5 v trojcifernom čísle neopakovala.

Riešenie: Na začiatku si musíme uvedomiť, že trojciferné číslo je také číslo, ktoré sa skladá z troch číslic (z troch cifier). Napríklad číslo 123 je trojciferné číslo a je zložené z číslic **1**, ktorá je v čísle na mieste **stoviek, 2**, ktorá je v čísle na mieste **desiatok** a z číslice **3**, ktorá je v čísle na mieste **jednotiek.** Každému musí byť jasné, že záleží na tom, či je napr. číslica 1 na mieste stoviek, desiatok alebo jednotiek – lebo inak by vznikli úplne rozdielne a iné čísla: 123 alebo 213 alebo 231.
V kombinatorike hovoríme, že **záleží na poradí.**

V kombinatorike je najdôležitejšie to, aby sme pri vytváraní skupín vytvorili systém tak, aby sme vyzvorili všetky skupiny, ktoré existujú, aby sme na niečo nezabudli a aby sme sa pri vytváraní skupín nepomýlili. Aj v našom príklade vytvárania trojciferného čísla musíme nájsť taký systém (spôsob) vytvárania čísel, aby sme sa nepomýlili a zároveň aby sme na žiadne trojciferné číslo nezabudli. Čísla vytvoríme tak, že si zvolíme číslo, ktoré bude prvé (teda na mieste stoviek) a k tomuto číslu dáme všetky ostatné tak, aby nám vznikli všetky trojciferné čísla.
Na prvé miesto (miesto stoviek) dáme najskôr číslicu 1. K jednotke môžeme potom pridať číslice 2 alebo 3. Dostaneme teda čísla 123 a 132
Potom si na prvé miesto (miesto stoviek) dáme číslicu 2. K dvojke potom priradíme číslice 1 a 3. Vzniknú nám trojciferné čísla 213 a 231.
Nakoniec si na prvé miesto (miesto stoviek) dáme číslicu 3. K trojke môžeme potom pridať číslice 1 a 2. Vzniknú nám trojciferné 312 a 321.
Všetky možnosti spočítame a zistíme, že z 3 číslic je možné vytvoriť 6 rôznych trojciferných čísel,
čiže 3 x 2 = 6 možností.

Riešenie sa dá zobraziť aj týmto grafom: **prvá číslica – miesto desiatok, druhá číslica – miesto jednotiek**

1 →	2 →	3	123	2 →	1 →	3	213	3 →	1 →	2	312
↘	3 →	2	132	↘	3 →	1	231	↘	2 →	1	321

2 možnosti + 2 možnosti + 2 možnosti = 6 možností

Iná možnosť nastane vtedy, ak sa číslice v trojcifernom čísle môžu opakovať. Vyriešme nasledujúci vzorový príklad:

Zadanie: Koľko všetkých dvojciferných čísel je možné zostaviť z číslic 5, 7 a 9, ak sa cifry v dvojcifernom čísle môžu opakovať?

Riešenie: Musíme si uvedomiť, že dvojciferné číslo je také číslo, ktoré sa skladá z dvoch číslic. (Napríklad číslo **57** je dvojciferné číslo a je zložené z číslice **5,** ktorá je v čísle na mieste **desiatok** a z číslice **7**, ktorá je v čísle na mieste **jednotiek.** Každému musí byť jasné, že záleží na tom, či je nejaká číslica na mieste desiatok alebo na mieste jednotiek – inak by vznikli dve rozdielne čísla: napr. **57** alebo **75.**

Tak ako v predchádzajúcom príklade aj v tomto si musíme vytvoriť systém, ktorým budeme dvojciferné čísla vytvárať tak, aby sme sa nepomýlili a zároveň aby sme na žiadne dvojciferné číslo nezabudli. Navyše čísla budú musieť byť vytvorené iba z číslic 5, 7 a 9, ale teraz sa cifry (čiže číslice) môžu v čísle opakovať.

Dvojciferné čísla budeme vytvárať tak, že si zvolíme číslo, ktoré bude prvé (teda na mieste desiatok) a k tomuto číslu dáme všetky ostatné tak, aby mi vznikli všetky dvojciferné čísla.

Na prvé miesto (miesto desiatok) dáme najskôr číslicu 5. K päťke môžeme potom pridať číslice 5, 7 alebo 9. Dostaneme teda čísla **55, 57 a 59.**
Potom si na prvé miesto (miesto desiatok) dáme číslicu 7. K sedmičke môžeme potom pridať číslice 5, 7 alebo 9. Vzniknú nám dvojciferné čísla **75, 77 a 79.**
Nakoniec si na prvé miesto (miesto desiatok) dáme číslicu 9. K deviatke môžeme potom pridať číslice 5, 7 alebo 9. Vzniknú nám dvojciferné čísla **95, 97 a 99.**
Všetky možnosti spočítame a zistíme, že z 3 číslic je možné zostaviť 9 rôznych dvojciferných čísel, čiže 3 x 3 = 9 možností.

Riešenie sa dá zobraziť aj týmto grafom: **prvá číslica – miesto desiatok, druhá číslica – miesto jednotiek**

5 →	5	55	7 →	5	75	9 →	5	95
	7	57		7	77		7	97
	9	59		9	79		9	99

3 možnosti + 3 možnosti + 3 možnosti = 9 možností

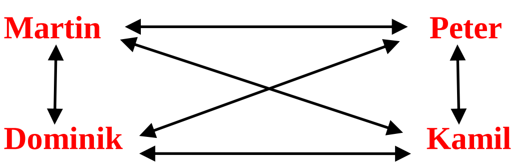
Ak v kombinatorike záleží na poradí hovoríme o variáciách (vytvárame variácie).

V príkladoch v ktorých nezáleží na poradí prvkov budeme hovoriť o **kombináciách** (**vytvárame kombinácie**). Typickým príkladom na vytváranie kombinácií sú príklady na **podávanie si rúk.**

Zadanie: Pred odchodom na prázdniny sa štyria spolužiaci rozlúčili vzájomným podaním rúk. Koľko je to podaní rúk? (Koľko-krát si podali všetci navzájom ruky?)

Riešenie: Nech sa naši štyria spolužiaci odchádzajúci na prázdniny volajú Martin **(M)**, Peter **(P)**, Dominik **(D)** a Kamil **(K).** Musíme si uvedomiť, že v tomto príklade je jedno či si ruky podá Martin s Petrom alebo Peter s Martinom – ide o jedno a to isté podanie si rúk. Budeme preto vytvárať dvojice, ktoré si budú podávať navzájom ruky, ale musíme myslieť na to, aby sme sa nepomýlili a aby sme nezapočítali 2-krát podanie rúk rovnakých kamarátov.

Systém vytvárania dvojíc zvolíme nasledovne: Ako prvého si zvolím Martina a ten si podá ruky s každým s kamarátov. Dostaneme teda dvojice **M – P, M – D a M –K.** Potom si zvolíme Petra, ktorý si podá ruky so všetkými kamarátmi okrem Martina, pretože s ním si už ruku podal. Dostaneme teda dvojice **P – D a P – K.** Nakoniec zvolíme Dominika, ktorý si však môže podať iba s Kamilom, pretože so všetkými ostatnými si ruku už podal. **D – K.** Keď teraz spočítame všetky možnosti dostaneme 6 možností, akými si kamaráti môžu podať ruky. Riešenie však môžeme zakresliť aj do nasledujúceho grafu: **(Koľko šípok, toľko podaní rúk).**



Ďalším typom príkladu v ktorom nezáleží na poradí prvkov je nasledujúci:

Zadanie: Karol dostal v poslednom štvrťroku školského roka tri rôzne známky z matematiky. Napíš aké mohol dostať známky, ak vieme, že Karol päťku nedostal.

Riešenie: Zo zadania príkladu je zrejmé, že Karol mohol dostať iba známky 1, 2, 3 alebo 4. Keďže za posledný štvrťrok dostal tri **rôzne** známky (nezáleží na poradí, lebo je jedno či ako prvú známku dostal Karol 1, 2, 3 alebo 4), budeme teda vyberať skupiny troch známok zo štyroch možných.

Aj v tomto príklade musíme nájsť systém, aby sme našli všetky možnosti a na žiadne nezabudli. Budeme to robiť tak, že si určíme pevné prvé dve známky a tretiu známku budeme meniť. Ak sa už nebude dať zmeniť tretia známka, zmeníme druhú známku a nakoniec ak sa nebude dať zmeniť už ani druhá známka, tak zmeníme aj prvú známku. Dostaneme nasledujúce kombinácie známok:

1, 2, 3 1, 3, 4
1, 2, 4 2, 3, 4

Z vypísania všetkých možností vyplýva, že Karol mohol dostať 4 možné kombinácie známok.

V kombinatorike ide teda o vytváranie **všetkých možností** alebo **všetkých skupín** z množiny, ktorú **máme k dispozícii.**
V prvom príklade sme vytvárali všetky dvojice chlapec-dievča (tanečné páry) z množiny 3 chlapcov a 4 dievčat ktoré sme mali k dispozícii.
V druhom príklade sme vytvárali všetky dvojciferné čísla (XY) z množiny 3 čísel (3,4 a 9), ktoré sme mali k dispozícii.

Ak v kombinatorike nezáleží na poradí hovoríme o kombináciách (vytvárame kombinácie).
Ak v kombinatorike záleží na poradí hovoríme o variáciách (vytvárame variácie).

Ďalšie vzorové príklady na kombinatorické úlohy:

Zadanie: Koľko veľkých (dvoj-kopčekových) zmrzlín je možné vytvoriť z 5 druhov zmrzlín?
Riešenie: Na začiatku si musíme uvedomiť, že v tomto prípade **nezáleží na poradí**, pretože napríklad citrónovo-čokoládová zmrzlina je to isté ako čokoládovo-citrónová.
Ideme teda vytvárať dvojicu zmrzlín z piatich, ktoré máme k dispozícii.
Ak by sme mali napríklad k dispozícii týchto 5 zmrzlín : citrónová (**C**), vanilková (**V**), malinová (**M**), kokosová (**K**) a pistáciová (**P**).

Dvojice začneme vytvárať tak, že ako prvú si dáme citrónovú zmrzlinu a ku nej pridáme všetky ostatné. Dostaneme tieto kombinácie: **C - V, C - M, C - K, C - P** a nesmiem zabudnúť na kombináciu **C - C**. Dostal som **5 možností.** Citrónovú zmrzlinu som skombinoval so všetkými ostatnými a preto ju musím v ďalších zmrzlinách vynechať.
Ďalšia zmrzlina v poradí je vanilková, preto túto skombinujem so všetkými ostatnými. Dostanem nasledujúce kombinácie zmrzlín: **V - M, V - K, V - P** a nemôžem zabudnúť na kombináciu **V - V**. Dostal som **4 možnosti.**
Vanilkovú zmrzlinu som skombinoval so všetkými ostatnými a preto ju musím v ďalších zmrzlinách vynechať.
Ďalšia zmrzlina v poradí je malinová, preto túto skombinujem so všetkými ostatnými. Dostanem nasledujúce kombinácie zmrzlín: **M - K, M - P** a nemôžem zabudnúť na kombináciu **M - M**. Dostal som **3 možnosti.**
Ďalšia zmrzlina v poradí je kokosová, ktorú môžem už skombinovať iba so zmrzlinou pistáciovou a samú so sebou **K – P, K - K**. Dostanem **2 možnosti.**
Nakoniec mi zostane iba posledná kombinácia **P - P,** čiže **1 možnosť.**
Keď všetky možnosti spočítam dostanem spolu 5+4+3+2+1= **15** možností, teda **15 kombinácií zmrzlín.**